Практическое занятие №12.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **функции многих переменных, частные производные, полный дифференциал.**

№	Задания
1	Найти область определения функции a) $z=\sqrt{xy}$ b) $z=\dfrac{4}{x^2+y^2}$ c) $z=arcsin(x+y)$ d) $z=\arcsin\dfrac{y+1}{x-1}$ e) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$ f) $z=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$ g) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ h) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ k) $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)\cdot(4-x^2-y^2)}$
2	Найти следующие пределы: a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x_1^2+\ldots x_m^2)^{\frac{1}{x_1^2+\ldots x_m^2}}$, $where\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$
3	Найти точки разрыва функций: a) $u=\dfrac{1}{4-x^2-y^2}$ b) $u=\dfrac{xy}{x+y}$ c) $u=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$
4	Найти частные производные первого и второго порядков для функций: a) $z=x^3+3x^2y-y^2$; b) $z=x^2\sin y$ c) $z=\ln(x+\ln y)$ d) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ e) $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ f) $z=x^y$ g) $z=e^{x^2+y^3}$; h) $u=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$ i) $u=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ j) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$
5	Найдите значение частных производных первого порядка в точке M(1;1) a) $z=x^3+3x^2y-y^3$; b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; c) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
6	Найти полный дифференциал первого порядка dz и второго порядка d^2z для функций: a) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; b) $z=x\,y\cos y$. c) $z=e^{\frac{x}{y}}$. d) $u=e^{xy}$
7	Найдите частные производные высших порядков: a) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$, *если* $u=x\ln(xy)$ b) $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}$, *если* $u=x^3\sin y+y^3\sin x$ c) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, *если* $u=e^{xyz}$
8	Найти дифференциал третьего порядка d^3z для функции $z=e^{x+y}$
9	Вычислить приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}$.
10	Найти градиент функции: a) $f(x,y)=2xy^2\sin(x^2+1)$ b) $f(x,y,z)=e^{x+2y}\cos(z^2+1)$ c) $f(x,y,z)=\sin(2xy)+\ln(x^2z)$
11	Найдите производную функции z в точке A по направлению вектора $\bar{l}$ a) $z=\ln(2x^2+3y^2)$, A(-3;2), $\bar{l}=2\bar{i}-3\bar{j}$ b) $z=\sqrt{x^2-y^2}$, A(5;4), $\bar{l}=4\bar{i}-3\bar{j}$ c) $z=3x^2-6xy+y^2$, $A\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{2}\right)$, $\bar{l}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\bar{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №12 (ФИТ)

Пример 1-3. Найти область определения функции

1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$. 2) $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$ 3) $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{1-x^2-y^2}$

Пример 4-7. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции:

4) $Z=x^2-2xy^2+y^3$. 5) $z=arctg\dfrac{y}{x}$. 6) $z=xe^{-xy}$. 7) $z=\dfrac{\cos y^2}{x}$

Пример 8. $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$. Найти dz.

Пример 9. Вычислить приближенно $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$.

Пример 10. $z=y\cdot\ln x$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Пример 11. Дана функция $z=ln(x^2+y^2)$. Проверить, выполняются ли соотношения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-0;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Пример 12. $z=x^2\cdot y$. Найти d^3z.

Пример 13. Дана функция $z=x^2e^y$, точка $A(-1{,}1)$ и вектор $\bar{s}=\{3,-1\}$. Найти:

1) градиент ∇z в точке А; 2) производную $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{s}}$ в точке А по направлению вектора $\bar{s}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Пример

Дано $f(x;y)=\dfrac{(x+y)^2}{2xy}$. Найти:

а) $f(2;3)$;

б) $f\left(1;\frac{y}{x}\right)$;

в) $f(x;-x)$;

г) $f(0;y)$;

д) $f\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)$.

а) Чтобы найти $f(2;3)$, надо в выражении для $f(x,y)$ подставить $x=2$, $y=3$ и выполнить указанные в f действия. Имеем $f(2;3)=\dfrac{(2+3)^2}{2\cdot2\cdot3}=\dfrac{25}{12}$.

б) $f\left(1;\frac{y}{x}\right)=\dfrac{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}{2\cdot1\cdot\frac{y}{x}}=\dfrac{(x+y)^2}{2xy}=f(x;y)$.

в) $f(x;-y)=\dfrac{(x+(-x))^2}{2x(-x)}=0$.

г) $f(0;y)=\dfrac{0+y}{2\cdot0\cdot y}$ — не существует.

д) $f\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right)=\dfrac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}=\dfrac{(x+y)^2}{2xy}=f(x;y)$.

Пример

Дано $f(x+y;x-y)=(x+y)^2y^2$. Найти $f(x;y)$.

◐ Введем обозначения

$$\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2}, \\ y=\dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Тогда

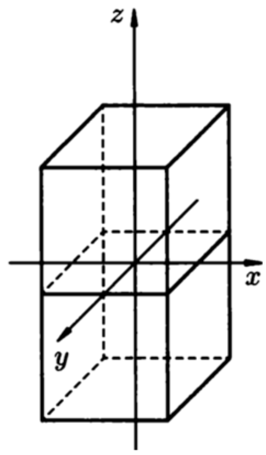
$$f(x+y,x-y)=f(u,v)= \\ =\left(\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{u-v}{2}\right)^2=u^2\cdot\frac{(u-v)^2}{4}.$$

Из $f(u;v)=u^2\dfrac{(u-v)^2}{4}$ следует, что $f(x;y)=x^2\dfrac{(x-y)^2}{4}$. ●

Пример

Найти области определения функции $u(x;y;z)=\arccos\frac{x}{2}+\arcsin\frac{y}{2}+\operatorname{arctg} z$.

◐ Область определения этой функции задается неравенствами $-2\leqslant x\leqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$, $z\in(-\infty,\infty)$. Первые два неравенства определяют квадрат в плоскости Oxy, а условие $z\in\mathbb{R}$ означает, что каждая прямая, проходящая через точку квадрата перпендикулярно ему, принадлежит области определения. Значит, D — бесконечный в направлении Oz параллелепипед (рис. 125). ●



Пример

Найти линии уровня функции $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}$.

◐ Линия уровня $z=c$ определяется уравнением $x=c\sqrt{y}$. Это полупарабола, расположенная в первой четверти при $c>0$, во второй четверти плоскости Oxy при $c<0$, и полуось Oy ($x=0$, $y>0$), если $c=0$. ●

Пример

Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x+2y-3)}{(x+2y)^2-9}$.

◐ Будем использовать первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ с $\alpha=x+2y-3$ стремящемся к нулю при $x\to 1$, $y\to 1$. Имеем $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x+2y-3)}{(x+2y-3)(x+2y+3)}=\dfrac{1}{6}$. ●

Пример:

Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}}\dfrac{\ln(3+x^2+y)}{2+y+x^2}$.

◐ Обозначим $t=2+y+x^2$. Тогда при $x\to 1$ и $y\to -3$ имеем $t\to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}}\dfrac{\ln(3+x^2+y)}{2+y+x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$. ●

2. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{2/(x^2+xy)}$.

△ Представим функцию в виде $[(1+xy)^{1/(xy)}]^{2y/(x+y)}$. Так как $z = xy \to 0$ при $\binom{x\to 0}{y\to 2}$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{1/(xy)} = \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = e$. Далее, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{2y}{x+y} = 2$ (в силу теоремы 4) Поэтому искомый предел равен e^2. ▲

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

△ Пусть точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0,0)$ по прямой $y = kx$, проходящей через точку O. Тогда получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=kx)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

Таким образом, приближаясь к точке $O(0,0)$ по различным прямым, соответствующим разным значениям k, получаем разные предельные значения Отсюда следует, что предел данной функции в точке $O(0,0)$ не существует ▲

5. Вычислить повторные пределы функции $f(x,y) = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$ в точке $O(0,0)$ при условии $c \neq 0$, $d \neq 0$

△ Имеем

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\Bigg(\lim_{\substack{y\to 0\\ x-\text{фикс}\\ x\neq 0}} \frac{ax+by}{cx+dy}\Bigg) = \lim_{x\to 0}\Bigg(\lim_{\substack{y\to 0\\ x-\text{фикс}\\ x\neq 0}} \frac{a+by/x}{c+dy/x}\Bigg) = \lim_{x\to 0}\frac{a}{c} = \frac{a}{c}$$

Аналогично получаем $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \dfrac{b}{d}$ ▲

Пример:

Исследовать точки разрыва функции $f(x;y) = \dfrac{x^2+3x-y^2+2}{x^2+y^2}$.

◔ Данная функция имеет единственную точку разрыва $M_0(0;0)$. В этой точке функция не определена, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = +\infty$.

По аналогии с функцией одной переменной имеем дело с точкой бесконечного разрыва (разрыв второго рода). В остальных точках функция непрерывна. ●

Пример:

Найти и исследовать точки разрыва функции $f(x;y;z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

◔ Для этой функции трех переменных все точки конуса $x^2+y^2-z^2=0$ являются точками разрыва. В окрестности каждой точки поверхности конуса (разрыва) функция $f(x;y;z)$ бесконечно велика. ●

Пример:

Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2 - \frac{x}{y}$ в точке $M_0(3;-2)$ при приращениях аргументов $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}05$.

◐ Принимаем $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, $x_0+\Delta x = x = 3{,}1$, $y_0+\Delta y = y = -2{,}05$, $M_1(3{,}1;-2{,}05)$. Сначала определим $z(M_0) = z(3;-2) = 3(-2)^2 + \frac{3}{2} = 13{,}50$. Далее,

$$z(x_0+\Delta x; y_0) = z(3{,}1;-2) = 3{,}1\cdot(-2)^2 + \frac{3{,}1}{2} = 13{,}95;$$

$$z(x_0; y_0+\Delta y) = z(3;-2{,}05) = 3\cdot(-2{,}05)^2 + \frac{3}{2{,}05} = 14{,}07;$$

$$z(M_1) = z(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) = z(3{,}1;-2{,}05) = \\ = 3{,}1\cdot(-2{,}05)^2 + \frac{3{,}1}{2{,}05} = 14{,}54.$$

Таким образом,

$$\Delta_x z = z(x_0+\Delta x; y_0) - z(x_0; y_0) = 0{,}45;$$
$$\Delta_y z = z(x_0; y_0+\Delta y) - z(x_0; y_0) = 0{,}57;$$
$$\Delta z = z(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - z(x_0; y_0) = 14{,}54 - 13{,}50 = 1{,}04.$$

Очевидно, что $\Delta z = 1{,}04 \neq 0{,}45 + 0{,}57 = 1{,}02 = \Delta_x z + \Delta_y z$. ●

Пример:

Найти частные производные функции $z = \frac{x}{y^3} + \frac{y}{x^3} - \frac{1}{6x^2y}$.

◐ Частные производные функции двух и более переменных определяются по тем же формулам и правилам, что и функции одной переменной. Следует помнить только одно правило: если по одной переменной дифференцируем, то остальные считаются постоянными.

Имеем $\left(\text{напомним, что } \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}\right)$:

$$z'_x = \frac{1}{y^3}(x)' + y\left(\frac{1}{x^3}\right)' - \frac{1}{6y}\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{y^3} - \frac{3y}{x^4} + \frac{1}{3x^3y};$$
$$z'_y = x\left(\frac{1}{y^3}\right)' + \frac{1}{x^3}(y)' - \frac{1}{6x^2}\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{3x}{y^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{6x^2y^2}.$$ ●

Пример:

Найти частные производные функции $z = \frac{x^2-2xy}{y^2+2xy+1}$.

◐ Здесь используем правило дифференцирования дроби.

$$z'_x = \frac{(2x-2y)(y^2+2xy+1)-(x^2-2xy)2y}{(y^2+2xy+1)^2};$$
$$z'_y = \frac{-2x(y^2+2xy+1)-(2y+2x)(x^2-2xy)}{(y^2+2xy+1)^2}.$$

Пример:

Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал функции $z = \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$.

Здесь имеем дело с производными сложной функции и дроби.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)'_x = $$
$$= -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{2x(x^3+y^3)-3x^2(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2}.$$

Ввиду симметрии выражения $\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ относительно x и y можно писать сразу

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{2y(x^3+y^3)-3y^2(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2}.$$

После преобразований получаем ответы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{(x^3+y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-y^4-3x^2y^2+2x^3y}{(x^3+y^3)^2};$$

$$d_xz = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,dx;$$

$$d_yz = \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,dy;$$

$$dz = \frac{1}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\times$$
$$\times\Big[x(x^3+3xy^2-2y^3)dx + y(y^3+3x^2y-2x^3)\,dy\Big].$$

Пример:

Найти полный дифференциал функции $u = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

Так как

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}},\quad u'_y = \frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}},\quad u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}},$$

то полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

Пример:

Вычислить приближенно $1{,}07^{3{,}97}$.

Число $1{,}07^{3{,}97}$ есть частное значение функции $f(x;y)=x^y$ при $x=1{,}07$, $y=3{,}97$. Известно, что $f(1;4)=1$. Поэтому принимаем $x_0=1$, $y_0=4$. Тогда $\Delta x = x - x_0 = 0{,}07$, $\Delta y = y - y_0 = -0{,}03$. Значение $f(x+\Delta x; y+\Delta y)$ вычислим при помощи формулы линеаризации: $f(x_0;y_0)+df(x_0;y_0)$. Имеем:

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x, \quad f'_x(1;4) = 4, \quad f'_y(1;4) = 0,$$
$$df(1;4) = 4 \cdot 0{,}07 + 0 \cdot (-0{,}03) = 0{,}28.$$

Таким образом, $1{,}07^{3{,}97} \approx 1 + 0{,}28 = 1{,}28.$

Пример:

Вычислить приближенно $\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5}$.

◐ 1) Принимаем $f(x;y) = (\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{5}{2}}$, $x_0 = 1{,}571 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$, $x = 1{,}55$, $\Delta x = x - x_0 = 1{,}55 - 1{,}571 = -0{,}021$, $y = 0{,}015$, $\Delta y = 0{,}015$.

2) $f(x_0;y_0) = (\sin\frac{\pi}{2} + 8e^0)^{\frac{5}{2}} = 243.$

3) $f'_x = \frac{5}{2}(\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin 2x$, $f'_y = \frac{5}{2}(\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{3}{2}} \cdot 8e^y$, $f'_x(x_0;y_0) = 0$, так как $\sin 2x_0 = \sin\pi = 0$, $f'_y(x_0;y_0) = 20(1+8)^{\frac{3}{2}} = 540$, $df(x_0;y_0) = 540 \cdot 0{,}015 = 8{,}1$.

Окончательно,

$$\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5} \approx 243 + 8{,}1 = 251{,}1. \qquad ●$$

Пример:

Вычислить приближенно $\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05}$.

◐ Имеем дело с функцией трех переменных $f(x;y;z) = \cos x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot 3^z$. $x_0 = \frac{3\pi}{4} = 2{,}356$, $x = 2{,}36$, $\Delta x = 0{,}004$, $y_0 = 1$, $y = 0{,}97$, $\Delta y = -0{,}03$, $z_0 = 2$, $z = 2{,}05$, $\Delta z = 0{,}05$. Наконец,

$$f(x_0;y_0;z_0) = \cos\frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{arctg} 1 \cdot 3^2 = -\frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \approx -4{,}9957.$$

Найдем сначала дифференциал в общем виде

$$df = -\sin x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot 3^z \Delta x + \frac{\cos x \cdot 3^z}{1+y^2}\Delta y + \cos x \operatorname{arctg} y \cdot 3^z \ln 3 \cdot \Delta z.$$

А теперь составим числовое выражение дифференциала в точке.

$$df(x_0;y_0;z_0) = -9\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \cdot 0{,}004 - \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot 0{,}03 - 9\ln 3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}05 \approx$$
$$\approx -0{,}0199 - 0{,}0954 - 0{,}2744 = -0{,}3718.$$

Окончательно,

$$\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05} \approx -4{,}9957 - 0{,}3718 = -5{,}3675. \qquad ●$$

Примеры:

45. Предполагая, что x, y малы по абсолютной величине, вывести приближенные формулы для следующих выражений:

а) $(1+x)^m(1+y)^m$; б) $\ln(1+x)\ln(1+y)$; в) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1+xy}$.

◀ Пусть функция $(x, y, \dots, z) \mapsto f(x, y, \dots, z)$ дифференцируема в окрестности точки $(0, 0, \dots, 0)$. Тогда

$$f(x, y, \dots, z)-f(0, 0, \dots, 0) = f'_x(0, 0, \dots, 0)x+f'_y(0, 0, \dots, 0)y+\dots+f'_z(0, 0, \dots, 0)z+o(\rho),$$

где $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{x^2+y^2+\dots+z^2}$. Отбрасывая величину $o(\rho)$ и перенося $f(0, 0, \dots, 0)$ в правую часть, получаем приближенное равенство

$$f(x, y, \dots, z) \approx f(0, 0, \dots, 0)+f'_x(0, 0, \dots, 0)x+f'_y(0, 0, \dots, 0)y+\dots+f'_z(0, 0, \dots, 0)z. \quad (1)$$

Поскольку предложенные функции дифференцируемы в окрестности точки $(0, 0)$, то соответствующие приближенные формулы принимают следующий вид:

а) $(1+x)^m(1+y)^m \approx 1+mx+my$;

б) $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy} \approx x+y$. ▶

Примеры:

46. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$; б) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$;

в) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$; г) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$; д) $0{,}97^{1{,}05}$.

◀ а) Записывал равенство (1) из предыдущего примера для функции $f(x, y, z) = (1+x)(2+y)^2(3+z)^3$, имеем

$$(1+x)(2+y)^2(3+z)^3 \approx 1\cdot 2^2\cdot 3^3+2^2\cdot 3^3x+2^2\cdot 3^3y+2^2\cdot 3^3z.$$

Подставляя в это равенство $x=0{,}002$, $y=0{,}003$, $z=0{,}004$, получаем $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3 \approx 108+0{,}216+0{,}324+0{,}432 = 108{,}972$.

б) Записав для функции $f(x, y, z) = \frac{(1+x)^2}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}$ приближенное равенство $f(x, y, z) \approx 1+2x+\frac{y}{3}-\frac{z}{4}$ и полагая $x=0{,}03$, $y=0{,}02$, $z=0{,}05$, получаем

$$\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}} \approx 1+0{,}06+0{,}0066-0{,}0125 \approx 1{,}054.$$

в) Имеем $\sqrt{(1+x)^3+(2-y)^3} \approx 3+\frac{x}{2}-2y$. Пусть $x=0{,}02$, $y=0{,}03$, тогда

$$\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3} \approx 3+0{,}01-0{,}06 = 2{,}95.$$

г) В приближенном равенстве (см. предыдущий пример)

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x+\sin\frac{\pi}{6}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}x$$

полагаем $x=0{,}017$, тогда

$$\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ \approx 0{,}5-0{,}866\cdot 0{,}017+0{,}017 \approx 0{,}502.$$

д) Записывая для функции $(1-x)^{1+y}$ приближенное равенство $(1-x)^{1+y} \approx 1-x$ и полагая в нем $x=0{,}03$, $y=0{,}05$, получаем $0{,}97^{1{,}05} \approx 1-0{,}03 = 0{,}97$. ▶

1. Найти частные производные второго порядка функции $u = x^y$

$\triangle$ Сначала находим частные производные первого порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$$

Затем, вычисляя частные производные от частных производных первого порядка, получаем производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = yx^{y-1}\ln x + x^y\frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y\ln x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2 \ \blacktriangle$$

Пример:

Для функции $z = e^{xy^3}$ найти: $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$.

1) Дифференцируем по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 e^{xy^3}; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^6 e^{xy^3}; \ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y^9 e^{xy^3}; \ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \underline{y^{12} e^{xy^3}}.$$

2) Находим другие смешанные производные:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y^9 e^{xy^3}) = \underline{9y^8 e^{xy^3} + 3y^{11} x e^{xy^3}}.$$

3) Далее,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(y^6 e^{xy^3}) = 6y^5 e^{xy^3} + 3y^8 x e^{xy^3} = 3y^5 e^{xy^3}(2 + y^3 x)$$

Окончательно,

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[3y^5 e^{xy^3}(2 + y^3 x)\right] =$$

$$= 3\left[5y^4 e^{xy^3}(2 + y^3 x) + 3xy^7 e^{xy^3}(2 + y^3 x) + 3y^7 x e^{xy^3}\right] =$$

$$= 3y^4 e^{xy^3}[10 + 14xy^3 + 3x^2 y^6]$$

Пример:

Найти $d^2 z$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

1) Находим первый дифференциал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

2) Далее отдельно считаем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

и, наконец, составляем второй дифференциал

$$d^2 z = \frac{2[xy\,dx^2 + (y^2-x^2)dx\,dy - xy\,dy^2]}{(x^2+y^2)^2}.$$

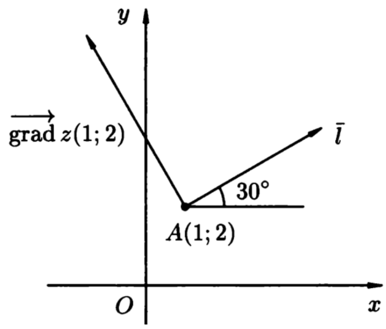
Пример:

81. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, удовлетворяющее условию $z(x, x^2) = 1$.

◀ Интегрируя уравнение по y, находим $z(x, y) = x^2 y + y^2 + \varphi(x)$, где φ — пока неопределенная функция. Для нахождения неизвестной функции φ используем условие $z(x, x^2) = 1$: $z(x, x^2) \equiv x^2 x^2 + x^4 + \varphi(x) = 1$. Отсюда $\varphi(x) = -2x^4 + 1$. Таким образом, $z(x, y) = x^2 y + y^2 - 2x^4 + 1$. ▶

Пример:

Найти производную функции $z = 2{,}5x^2 - 5xy + 3y^2 + 5y$ в точке $A(1;2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол $30°$. Определить направление максимального роста данной функции в данной точке.



◯ Имеем $z'_x = 5x - 5y$, $z'_y = -5x + 6y + 5$, $z'_x(1;2) = -5$, $z'_y(1;2) = 12$. Следовательно, если через $\bar{l}$ обозначим данное направление, то $\frac{\partial f}{\partial l} = -5\cos 30° + 12\sin 30° = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + 6$. Градиент функции поля в данной точке имеет вид $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(1;2) = (-5; 12) = -5\bar{i} + 12\bar{j}$. Этот вектор указывает направление, в котором функция растет быстрее, чем по другим направлениям. На рис. 127 схематически изображены точка $A(1;2)$, направление $\bar{l}$ с $\alpha = 30°$ и направление $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z$. Максимальное значение производной в точке $A(1;2)$ равно модулю градиента: $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Пример:

Найти производную функции $z = f(x;y) = 3x^2 + 5y^2$ в точке $A(1;-1)$ по направлению к точке $B(2;1)$.

◯ Имеем $\overline{AB} = \bar{l} = (2-1; 1+1) = (1;2)$, $|\bar{l}| = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $\bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — орт направления $\bar{l}$. Далее, имеем $z'_x = 6x$, $z'_y = 10y$, $z'_x(1;-1) = 6$, $z'_y(1;-1) = -10$, а значит $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1;-1)} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{5}} = -\frac{14}{\sqrt{5}}$. Отрицательность $\frac{\partial z}{\partial l}$ означает, что функция в этом направлении убывает. ●

Пример:

Найти направление максимального роста функции $z = 3x^2 + xy - 2y^2$ в точке $A(2;1)$. Найти также наибольшее из значений производных по разным направлениям в точке A.

◯ Имеем

$$z'_x = 6x + y, \quad z'_y = x - 4y, \quad z'_x(2;1) = 13, \quad z'_y(2;1) = -2.$$

Градиент функции z в данной точке — это вектор $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(2;1) = (13;-2)$. Этот вектор (его направление) указывает на направление максимального роста функции в точке $A(2;1)$. Наибольшее значение производной в $A(2;1)$ равно $\sqrt{13^2+2^2} = \sqrt{173}$.

Пример:

Даны функция $z = x^2 + 3y^3 - xy$, точка $A(1;1)$ и вектор $\bar{a} = (-5;12)$. Найти

а) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(A)$;

б) производную в точке A по направлению $\bar{a}$.

а) Имеем $z'_x = 2x - y$, $z'_y = 9y^2 - x$, $z'_x(1;1) = 1$, $z'_y(1;1) = 8$, значит, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(1;1) = (1;8)$.

б) Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{a}$, $|a| = 13$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$. Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial a} = -1\cdot\frac{5}{13} + 8\cdot\frac{12}{13} = 7$.

Максимальная производная в точке $A(1;1)$ равна $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(1;1)\right| = \sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{65}$, а по направлению $\bar{a}$ величина производной равна 7.